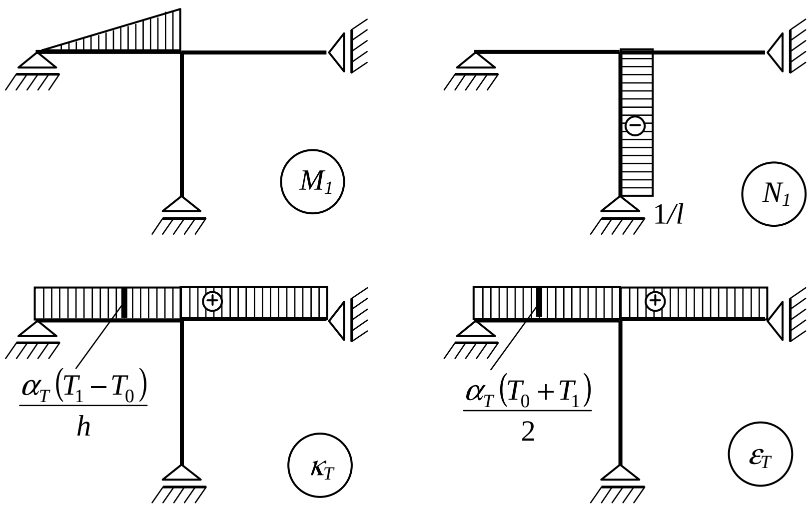


Rys. 2.4b

Wartości krzywizn κ_T odkładamy po stronie włókien rozciąganych, natomiast wydłużenia termiczne mają znak dodatni a skrócenia ujemny.

Składniki termiczne w całce Mohra mają postać

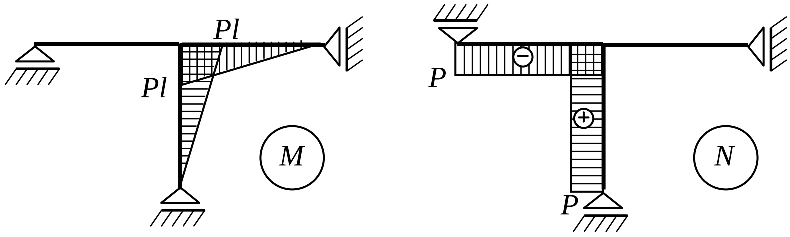
$$\int_s \kappa_T M_1 ds = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{h} \alpha_T = \frac{\alpha_T (T_1 - T_0) l}{2h}$$

$$\int_s \varepsilon_T N_1 ds = 0$$

a) W materiale liniowo-sprężystym wyrażenia na wydłużenia ε_M i zmiany krzywizn κ_M

$$\varepsilon_M = \frac{N}{EF}, \quad \kappa_M = \frac{M}{EJ}$$

Wykresy funkcji *M* i *N* mają postać



Rys. 2.4c

Obrót φ_A wyrazi się zależnością

$$\varphi_A = \int_s \frac{NN_1}{EF} ds + \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h} = -\frac{P}{EF} + \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h}$$

b) Materiał nieliniowo-sprężysty

Wzory na zmiany krzywizn i wydłużeń mechanicznych mają postać

$$\kappa_M = \frac{M^n}{[AJ(N+1)]^n}, \qquad \varepsilon_M = \frac{N^n}{(AF)^n}\ , \qquad n = \frac{1}{N}$$

Funkcje M i N mają ten sam kształt co w rozwiązaniu liniowym. Wtedy zgodnie z (1) obrót φ_A wyrazi się zależnością

$$\varphi_A = \int_s \left(\frac{N}{AF}\right)^n N_1 ds + \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h}$$

stąd po podstawieniu otrzymamy wartość obrotu φ_A

$$\varphi_A = \int_0^l \frac{P^n}{(AF)^n} \cdot \left(-\frac{1}{l}\right) ds + \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h} = -\left(\frac{P}{AF}\right)^n + \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h} =$$
$$= -\frac{P^n}{(AF)^n} + \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h}$$

Rozpatrywane zadanie jest o tyle szczególne, iż występujący w układzie rozkład momentów zginających jest bez wpływu na wartość kąta obrotu φ_A.

c) Rozwiązanie lepkosprężyste

Wzory na krzywiznę i wydłużenie mają postać

$$\kappa_M = \frac{1}{J} G * dM, \qquad \varepsilon_M = \frac{1}{F} G * dN$$

stąd

$$\varphi_A(t) = \int_0^l \frac{1}{F} G * dN\ N_1 ds + \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h} = \frac{1}{F} \int_0^l N_1 \int_0^t G\,(t-\tau) dP(\tau)\, ds +$$
$$+ \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h} = -\frac{1}{F} \int_0^t G(t-\tau)\, dP(\tau)\, ds + \frac{\alpha_T l(T_1 - T_0)}{2h},$$

G – funkcja pełzania.

W chwili początkowej $G\left(t \to 0_+\right) = \frac{1}{E}$ co prowadzi do zależności

$$\varphi_A\left(0_+\right) = -\frac{1}{EF} P\left(0_+\right) + \frac{\alpha_T l\left(T_1 - T_0\right)}{2h}$$

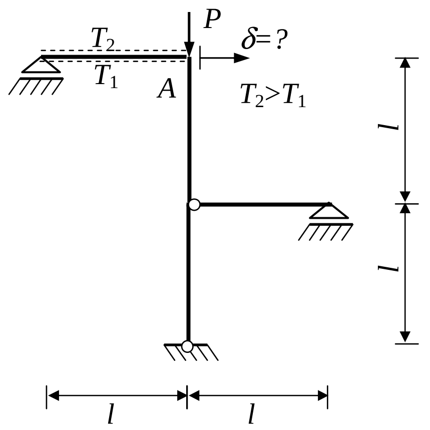
ZADANIE 2.5.

W podanym układzie statycznie wyznaczalnym poddanym działaniu obciążeń i zmiennych po wysokości przekroju temperatur należy obliczyć przemieszczenie poziome δ_A punktu A. Obliczenia należy przeprowadzić w zakresie:

a) liniowo sprężystym $\sigma = E\left(\varepsilon - \varepsilon_T\right)$,

b) nieliniowo sprężystym $\sigma = A\left(\varepsilon - \varepsilon_T\right)^N$,

c) teorii starzenia $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + A\sigma^n + \varepsilon_T$.



Rys. 2.5a

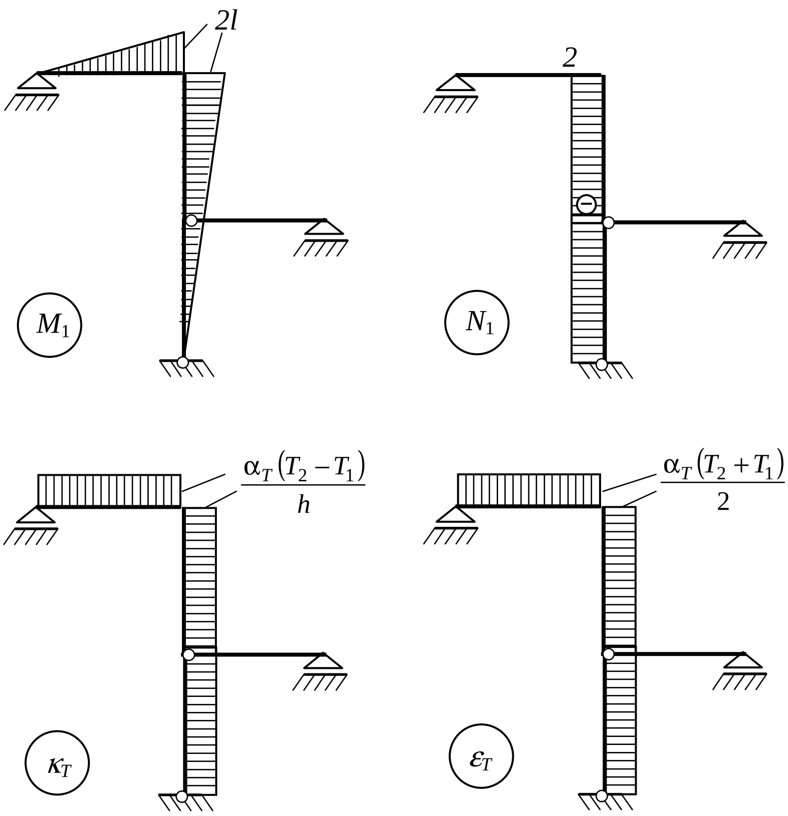
Dane: P, l, E, A, F, J, $J(N+1)$, T_1, T_2.
Szukane: wielkość przemieszczenia δ_A w punkcie A.

Rozwiązanie:
Przemieszczenie punktu A wyliczymy z wzoru

$$\delta_A = \int_s \kappa_M M_1 ds + \int_s \varepsilon_M N_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds$$

gdzie $\kappa_M, \kappa_T, \varepsilon_M, \varepsilon_T$ są odpowiednio krzywiznami wywołanymi wpływami mechanicznymi i cieplnymi oraz wydłużeniami mechanicznymi i termicznymi.

Wykresy funkcji M_1, N_1, κ_T i ε_T mają postać



Rys. 2.5b

Następnie wyznaczamy wartości termicznych deformacji w całce Mohra:

$$\int_s \kappa_T M_1 ds = \frac{1}{2}\cdot 2l\cdot l\cdot \frac{\alpha_T\left(T_2 - T_1\right)}{h} + \frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2l\cdot \frac{\alpha_T\left(T_2 - T_1\right)}{h} = \frac{3l^2\alpha_T\left(T_2 - T_1\right)}{h}$$

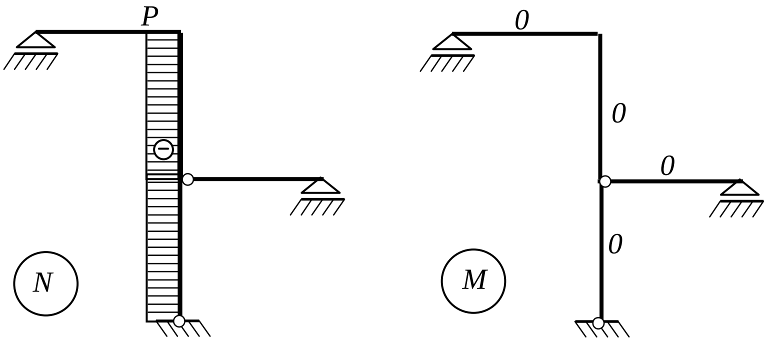
$$\int_s \varepsilon_T N_1 ds = 2 \cdot 2l \cdot \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} = 2l\alpha_T (T_1 + T_2)$$

a) Teraz określimy wartość przemieszczenia δ_A w przypadku **liniowo - sprężystym**.

Materiał liniowo sprężysty określają następujące wyrażenia na wydłużenia i zmiany krzywizn

$$\varepsilon_M = \frac{N}{EF} \quad , \quad \kappa_M = \frac{M}{EJ}$$

Wykresy funkcji *M* i *N* są następujące



Rys. 2.5c

Jak widać w rozważanym przykładzie funkcja momentów zginających *M* jest funkcją zerową.

Ostatecznie przemieszczenie δ wyrazi się zależnością

$$\delta_A = \int_s \frac{MM_1}{EJ} ds + \int_s \frac{NN_1}{EF} ds + \frac{\alpha_T (T_2 - T_1) 3l^2}{h} + 2l\alpha_T (T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{4Pl}{EF} + \frac{\alpha_T (T_2 - T_1) 3l^2}{h} + 2l\alpha_T (T_2 + T_1)$$

b) **Materiał nieliniowo sprężysty**

Wzory na zmianę krzywizn i wydłużeń mechanicznych mają postać

$$\kappa_M = \frac{M^n}{[AJ(N+1)]^n}, \qquad \varepsilon_M = \frac{N^n}{(AF)^n}$$

Przemieszczenie δ punktu A wyznaczymy z wzoru

$$\delta=\int_0^{2l}\frac{N^nN_1}{(AF)^n}ds+\frac{\alpha_T(T_2-T_1)3l^2}{h}+2l\alpha_T(T_2+T_1)=$$

$$=\frac{P^n4l}{(AF)^n}+\frac{\alpha_T(T_2-T_1)3l^2}{h}+\alpha_T(T_2+T_1)2l$$

c) **Teoria starzenia**

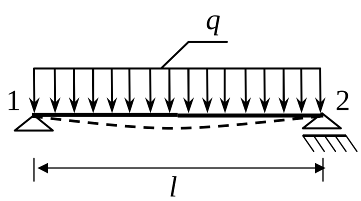
Wzór określający przemieszczenie punktu A dla układu pełzającego wg teorii starzenia ma postać

$$\delta_A=\int_s\frac{MM_1}{EJ}ds+\int_s\frac{AM^nM_1}{J(N+1)^n}ds+\int_s\kappa_TM_1ds+\int_s\frac{NN_1}{EF}ds+\int_s\frac{AN^nN_1}{F^n}ds+$$

$$+\int_s\varepsilon_TN_1ds=\frac{\alpha_T(T_2-T_1)3l^2}{h}+\frac{4Pl}{EF}+\frac{AP^n4l}{F^n}+2l\alpha_T(T_2+T_1)$$

ZADANIE 2.6.

W belce wolnopodpartej o długości l obciążonej równomiernie obciążeniem q należy obliczyć kąt wzajemnego obrotu skrajnych przekrojów belki. Zadanie należy przeanalizować dla liniowych i nieliniowych równań fizycznych.



Rys. 2.6a

Rozwiązanie:

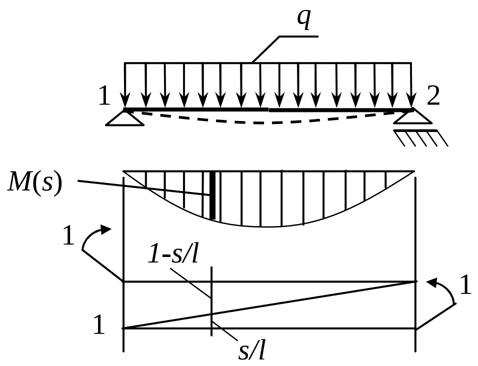
Kąt wzajemnego obrotu końców belki wyznaczymy sumując obrót podpory lewej φ_1 i prawej φ_2, czyli $\varphi_{12}=\varphi_1+\varphi_2$. Przy obliczeniach kątów φ_1 i φ_2 korzystamy z całki Mohra. Funkcja momentu zginającego ma postać $M(s)=\frac{ql}{2}s-\frac{qs^2}{2}$, $\quad M_1(s)=1-\frac{s}{l}$

a) W **zadaniu liniowym** kąty φ_1 i φ_2 wynoszą

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{2ql^2}{24}l\right)\frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EJ}$$

stąd

$$\varphi_{12} = \frac{ql^3}{12EJ}$$



Rys. 2.6b

Zwróćmy uwagę, iż wynik ten wobec liniowości całki Mohra można uzyskać z relacji

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 = \int_0^l \frac{M(s)}{EJ}\left(1-\frac{s}{l}\right)ds + \int_0^l \frac{M(s)}{EJ}\frac{s}{l}ds = \int_0^l \frac{M(s)\cdot 1}{EJ}ds$$

Przytoczony wynik jest słuszny również w ogólnym przypadku, ponieważ

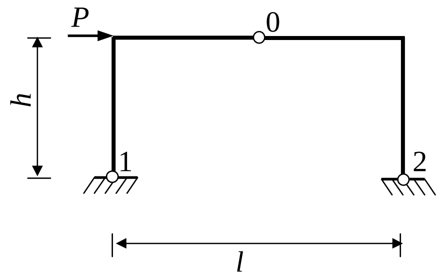
$$\varphi_{12} = \int_0^l \kappa\left(1-\frac{s}{l}\right)ds + \int_0^l \kappa\frac{s}{l}ds = \int_0^l \kappa\cdot 1ds$$

b) W **zadaniu nieliniowo sprężystym** $\sigma = A\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ o krzywiźnie $\kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n$ zachodzi

$$\varphi_{12}^N = \int_0^l \kappa\cdot 1ds = \left(AJ(N+1)\right)^{-n}\left(\frac{q}{2}\right)^n \int_0^l \left(ls - s^2\right)^n ds$$

ZADANIE 2.7.

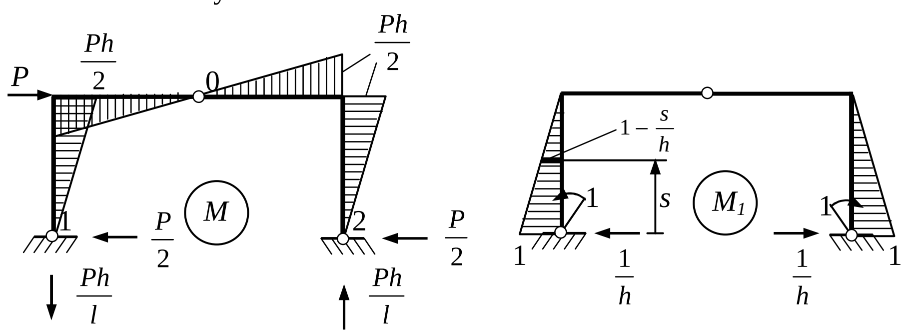
W ramie trójprzegubowej obciążonej siłą poziomą *P* należy obliczyć kąt wzajemnego obrotu części przypodporowych 1 – 2.



Rys. 2.7a

Rozwiązanie:

Kąt wzajemnego obrotu φ_{12} uzyskamy podobnie jak poprzednio po zsumowaniu obrotów φ_1 i φ_2. Funkcje momentów zginających i ich rozkłady przedstawiono na wykresach.



Rys. 2.7b

Równania równowagi

$H_1+H_2=0$

$V_1 l - Ph=0$

$V_1 \dfrac{l}{2} - H_1 h = 0$

$V_1+V_2 = 0$

$V_1 = -V_2 = \dfrac{Ph}{l}$

$H_1 = H_2 = \dfrac{P}{2}$

Funkcje momentów

$M(s) = V_1 s = \dfrac{Ps}{2}$, $\quad M(s) = -\dfrac{Ps}{2}$

$- M_1(s) = 1 - \dfrac{1}{h}s$

$+ M_1(s) = 1 - \dfrac{1}{h}s$

Kąt wzajemnego obrotu φ_{12} obliczymy z całki Mohra

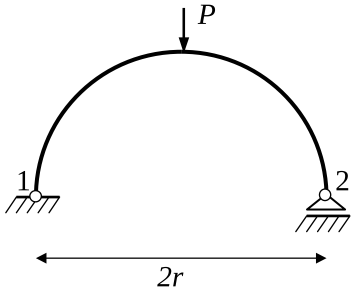
$$\varphi_{12} = \int_0^l \kappa\left(1 - \frac{1}{h}s\right)ds - \int_0^l \kappa\left(1 - \frac{1}{h}s\right)ds = 0$$

Całka ta znika dla dowolnego wyrażenia na krzywiznę κ z uwagi na fakt, iż wykres momentów zginających $M(s)$ jest asymetryczny, zaś wykres $M_1(s)$ symetryczny.

Wnosimy stąd, iż kąt wzajemnego obrotu φ_{12} niezależnie od typu materiału jest równy zeru. Nie oznacza to oczywiście, iż kąty obrotu φ_1 i φ_2 również znikną.

ZADANIE 2.8.

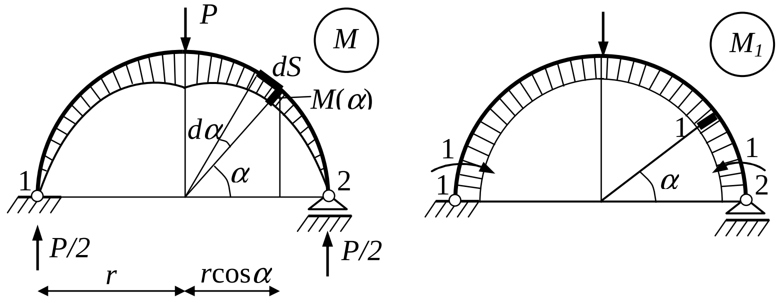
Należy określić w łuku kołowym obciążonym w zworniku siłą skupioną P kąt wzajemnego obrotu przekrojów przypodporowych. Problem należy przeanalizować w liniowym i nieliniowym zakresie odkształceń sprężystych.



Rys. 2.8a

Rozwiązanie:

Kąt wzajemnego obrotu φ_{12} obliczymy wykorzystując całkę Mohra *(ds = rdα)*



Rys. 2.8b

Funkcja momentów zginających *M(α)* ma postać

$$M(\alpha)=\frac{P}{2}(r-r\cos\alpha)=\frac{P\,r}{2}(1-\cos\alpha), \qquad M_1(\alpha)=1$$

a) Kąt wzajemnego obrotu φ_{12} **w zadaniu liniowym** wynosi

$$\varphi_{12}=2\int_0^{\pi/2}\kappa M_1 r d\alpha=\frac{2}{EJ}\int_0^{\pi/2}\frac{P\,r^2}{2}(1-\cos\alpha)d\alpha=$$

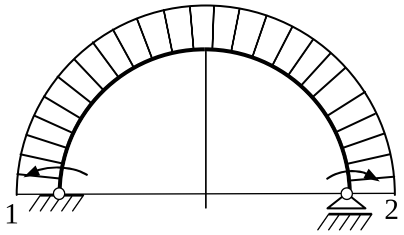
$$=\frac{P\,r^2}{EJ}\left[\alpha-\sin\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{P\,r^2}{EJ}\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$$

b) W **zadaniu nieliniowym** $\sigma=A\varepsilon^{1/n}$ o krzywiźnie $\kappa=\left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n$ analogiczny względny obrót wynosi

$$\varphi_{12}^{N}=2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n M_1 r d\alpha=\frac{2r}{(AJ(N+1))^n}\left(\frac{P\,r}{2}\right)^n\int_0^{\pi/2}(1-\cos\alpha)^n d\alpha$$

ZADANIE 2.9.

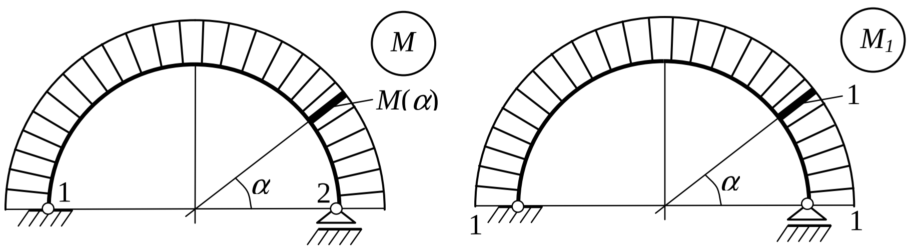
Należy określić w łuku kołowym przedstawionym na rys. 2.9a kąt względnego obrotu podpór. Zadanie należy rozwiązać w zakresie sprężystym (nieliniowym i liniowym), a uzyskane wyniki porównać.



Rys. 2.9a

Rozwiązanie:

Funkcja momentów zginających jest stała $M(\alpha) = const$ podobnie jak funkcja $M_1(\alpha) = const$ (rys.2.9b). Kąty wzajemnego obrotu obliczymy z całki Mohra.



Rys. 2.9b

a) W **zadaniu liniowym** będzie

$$\varphi_{12} = \int_0^{\pi} \frac{M}{EJ} M_1 r d\alpha = \frac{M}{EJ} \pi r$$

b) W **zadaniu nieliniowym** $\sigma = A\varepsilon^{1/n}$ zachodzi

$$\varphi_{12}{}^{N} = \int_0^{\pi} \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n 1\, r d\alpha = \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n \pi r$$

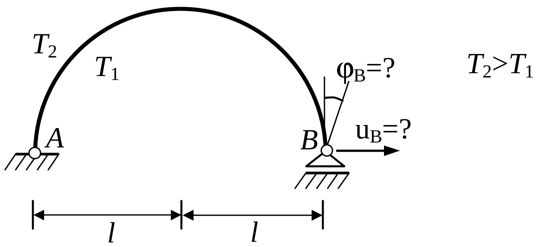
Z porównania rozwiązań obu zadań wynika, że

$$\frac{\varphi_{12}{}^{N}}{\varphi_{12}} = \left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^{n}\frac{EJ}{M} = \frac{EJ}{\left(AJ(N+1)\right)^{n}}M^{n-1}$$

Stosunek obrotów w obu zadaniach nieliniowym zależy od stosunku sztywności $\dfrac{EJ}{AJ(N+1)^{n}}$ i momentu M.

ZADANIE 2.10.

Należy określić przemieszczenie i kąt obrotu punktu B łuku kołowego statycznie wyznaczalnego poddanego działaniu nierównomiernego ogrzewania.



Rys. 2.10a

Dane: T_1, T_2, l, E, A, F, J, $J(N+1)$

Szukane: φ_B , u_B

Rozwiązanie:
Szukane przemieszczenia punktu B wyliczymy ze wzoru

$$\delta = \int_s \kappa_M M_1 ds + \int_s \varepsilon_M N_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds$$

gdzie $\kappa_M, \kappa_T, \varepsilon_M, \varepsilon_T$ są odpowiednio krzywiznami i odkształceniami wywołanymi wpływami mechanicznymi i cieplnymi. Z powyższego wzoru wyliczymy szukane przemieszczenie liniowe u_B oraz obrót φ_B. W miejsce szukanego przemieszczenia możemy wstawić jednostkową siłę dla przemieszczenia liniowego u_B , a dla przemieszczenia kątowego φ_B wstawiamy jednostkowy moment.

Jako, że w powyższym zadaniu mamy tylko oddziaływania termiczne, wzór dla przemieszczenia u_B przyjmie postać

$$u_B = \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds, \qquad M_1 = M_1(P=1)$$
$$N_1 = N_1(P=1)$$

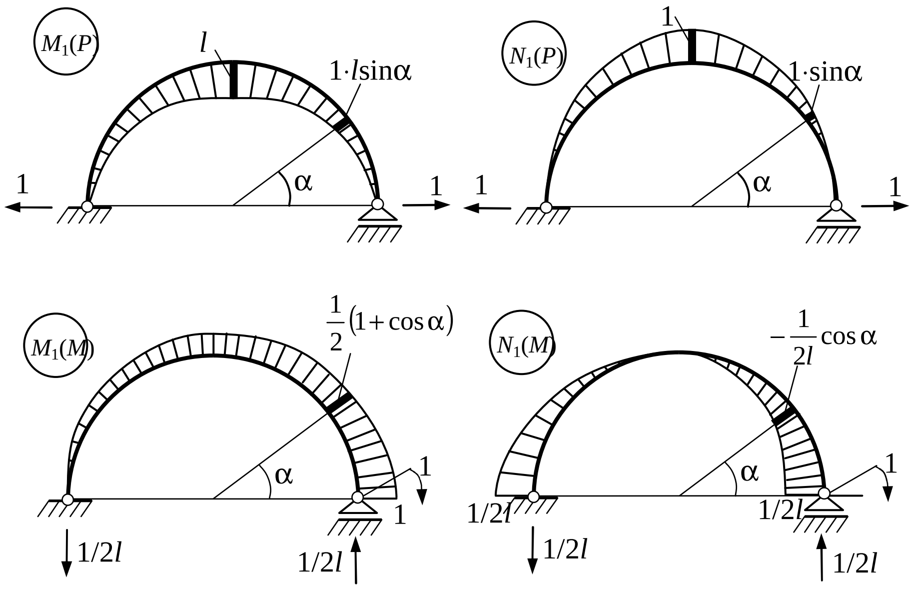
a dla przemieszczenia kątowego φ_B będziemy mieli zależność

$$\varphi_B = \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds, \qquad M_1 = M_1(M=1)$$
$$N_1 = N_1(M=1)$$

Niezależnie od równania fizycznego, krzywizny i wydłużenia pochodzące od przyrostu temperatury mają postać

$$\kappa_T = \frac{\alpha_T(T_2 - T_1)}{h}, \qquad \varepsilon_T = \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2}$$

Wykresy funkcji $M_1(P)$, $N_1(P)$, $M_1(M)$, $N_1(M)$ mają następującą postać



Rys. 2.10b

Podstawiając wyrażenia na κ_T, ε_T i siły od wpływów jednostkowych uzyskamy

$$u_B = \int_0^\pi \frac{\alpha_T (T_2 - T_1)}{h} (l \sin\alpha) l \, d\alpha + \int_0^\pi \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} \sin\alpha \, l d\alpha, \quad ds = l d\alpha$$

oraz

$$\varphi_B = \int_0^\pi \frac{\alpha_T (T_2 - T_1)}{h} \frac{1}{2} (1 + \cos\alpha) \, l \, d\alpha - \int_0^\pi \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} \frac{1}{2l} \cos\alpha \, l d\alpha$$

Po wyliczeniu całek i przekształceniach szukane przemieszczenia przyjmą postać

$$u_B = \frac{2\alpha_T (T_2 - T_1) l^2}{h} + \alpha_T (T_2 + T_1) l$$

$$\varphi_B = \frac{\alpha_T (T_2 - T_1) l \pi}{2h}$$

Wynik ten jest prawdziwy zarówno dla rozwiązania liniowo i nieliniowo sprężystego, jak również dla teorii starzenia. Ogólnie jest on słuszny dla każdego równania teorii naprężeń cieplnych. Istotnie, w ogólnym wyrażeniu na przemieszczenia znikną całki Mohra od obciążeń mechanicznych, a pozostają jedynie człony wynikające z odkształceń termicznych. Dzieje się tak dlatego, gdyż różnica między zadaniem liniowym a nieliniowym tkwi w sposobie definiowania tylko deformacji mechanicznych, których tu nie ma.